DEVOIR MAISON DE MATHEMATIQUES N°1

Nombres Complexes

<u>Exercice n°1</u> : Résolution par radicaux de l'équation de degré 3 :

Dans cet exercice, on cherche à résoudre une équation (E) :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,\ \left(a, b, c\right) \in \mathbb{R}^3$$

1. En posant $X = x + \dfrac{a}{3}$, montrer que résoudre (E) revient à résoudre :

   $$(E') : X^3 + pX + q$$

   On donnera l'expression de p et q en fonction de a, b, c.

2. On pose $\Delta = \dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$. On veut montrer que si $\Delta > 0$, alors une solution réelle de (E') est :

   $$x_0 = \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

   a) On pose : $X = u + v$

   Montrer que si $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \times v = -\frac{p}{3} \end{cases}$, alors X est solution de (E').

   b) Posons $U = u^3$ et $V = v^3$

   Montrer que résoudre le système $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \times v = -\frac{p}{3} \end{cases}$, revient à résoudre :

   $$\begin{cases} U + V = -q \\ U \times V = -\frac{p^3}{27} \end{cases},$$

   c) En posant $\Delta = \dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$ et en supposant $\Delta > 0$, déterminer un couple (U, V) solution du système (on exprimera U et V en fonction de p et q).

   d) En déduire que si $\Delta > 0$, alors une solution réelle de (E') est :

   $$x_0 = \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

<u>Exercice n°2</u> : Un calcul de somme :

Calculer la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Indice : On pourra dériver de deux manières différentes la fonction f définie par :

$$f(x) = (x + 1)^n$$