

DEVOIR MAISON DE MATHEMATIQUES N°2

Suites Arithmético-Géométriques, Suites Homographiques

Exercice n°1 : Suites arithmético-géométriques : 10 points

Jade dépose 5 000 € sur son compte en banque le 1^{er} Janvier 2019. Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus, le dernier jour de chaque mois, elle dépose 2 000€ supplémentaires sur le compte. On note u_n la somme sur le compte le 1^{er} jour du mois, n mois après janvier 2019.

1. Donner la valeur de u_1 et u_2 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 2000$.
3. On souhaite connaître la somme sur le compte le 1^{er} Janvier 2020.
 - a) Compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il réponde à la question.

```
u = ...  
for i in range (...):  
    u = ...  
print (...)
```

- b) A l'aide de la calculatrice, déterminer la somme sur le compte le 1^{er} janvier 2020.
4. **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 8\,000$.
b) En déduire le sens de variations de la suite (u_n) .
 5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8\,000$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b) Déterminer l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .

Exercice n°2 : 10 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. a) Calculer u_1 et u_2 .
b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a $u_n > 0$.
2. On définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \frac{3x}{1 + 2x}$$

- a) Montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$.
- b) Montrer par récurrence que $u_n < 1$.
- c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

- a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3.
- b) Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
- c) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$$