

DEVOIR MAISON DE MATHEMATIQUES N°3

Exercice Type Bac

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus. Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,6 \\ u_{n+1} = 0,75u_n(1 - 0,15u_n) \end{cases}$$

Où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, en début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 0,75x(1 - 0,15x)$$

2. Montre que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c) On admet que la limite l de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$. En déduire la valeur de l .

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a

```
def menace()
    u = 0,6
    n = 0
    while u > 0,02
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n + 1
    return n
```

raison.

b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-contre :

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.