FICHE D'EXERCICES

Fonctions polynômes et équations du second degré

<u>Exercice n°1 :</u> Pour chaque fonction, déterminer si c'est une fonction polynôme de degré 2.

a) $f(x) = x^2 + 2x - \sqrt{2}$

b) $g(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 1$

c) $h(x) = 2x + 1$

<u>Exercice n°2 :</u> Parmi les fonctions ci-dessous, indiquer les fonctions du second degré en indiquant les coefficients.

a) $f(x) = (x+1)^2$

b) $g(x) = (x+1)(x-1)$

c) $h(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$

<u>Exercice n°3 :</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x+2)^2 - 3(x+1)$

1. Développer $f(x)$.

2. En déduire que f est une fonction polynôme de degré 2 et déterminer ses coefficients.

<u>Exercice n°4 :</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 24x - 41$.

1. Développer l'expression $-3(x-4)^2 + 7$.

2. En déduire la forme canonique de f.

<u>Exercice n°5 :</u> Déterminer la forme canonique des trinômes suivants :

1) $x^2 + 6x - 8$

2) $x^2 - 5x + 3$

3) $2x^2 + 6x + 4$

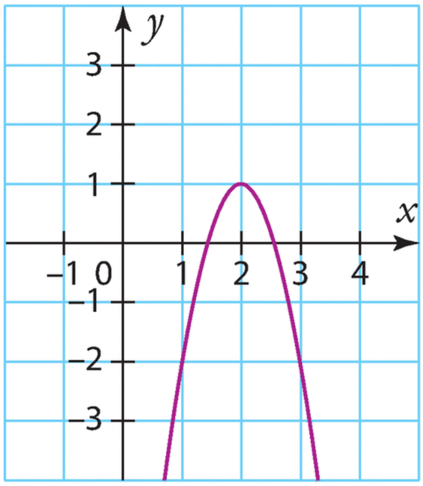
4) $-x^2 + x + 3$

5) $3x^2 + 12x + 12$

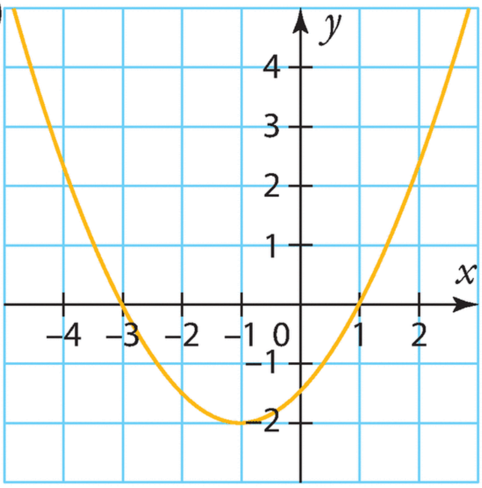
6) $-x^2 + 7x - 10$

<u>Exercice n°6 :</u> Pour chaque fonction, déterminer le tableau de variations et le signe de a.

a)



b)



<u>Exercice n°7</u> : Déterminer le tableau de variations des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = -x^2 + 2x - 3$

b) $f_2(x) = x^2 + x + 3$

c) $f_3(x) = 2x^2 - 5x + 3$

d) $f_4(x) = -2x^2 - 5x + 3$

<u>Exercice n°8</u> : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2 - x - 6 = 0$
2) $x^2 + 2x - 3 = 0$
3) $x^2 - x + 2 = 0$
4) $-x^2 + 2x - 1 = 0$
5) $y^2 + 5y - 6 = 0$
6) $1 - t - 2t^2 = 0$
7) $x^2 + x - 1 = 0$
8) $2x^2 + 12x + 18 = 0$
9) $-3x^2 + 7x + 1 = 0$
10) $x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

<u>Exercice n°9</u> : En fonction d'un paramètre :

Pour quelle valeur de m l'équation : $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ admet-elle une racine double ?

Calculer cette racine.

<u>Exercice n°10 :</u> Dresser le tableau de signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$
2. $g(x) = 9x^2 + 24x + 16$
3. $h(x) = 2x^2 - 5x + 6$

<u>Exercice n°11 :</u> Résoudre les inéquations suivantes :

1) $x^2 - 3x + 2 > 0$
2) $x^2 + 4 \geqslant 0$
3) $m^2 + m - 20 \leqslant 0$
4) $x^2 - x + 1 < 0$
5) $3x^2 + 18x + 27 > 0$
6) $-x^2 - 9 \geqslant 0$
7) $x(x-2) < 0$
8) $x^2 + 7x + 12 \geqslant 0$

<u>Exercice n°12</u> : Résoudre les équations suivantes :

1) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = 2x - 1$ 2) $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{x+1}{x-2} = -\dfrac{11}{5}$

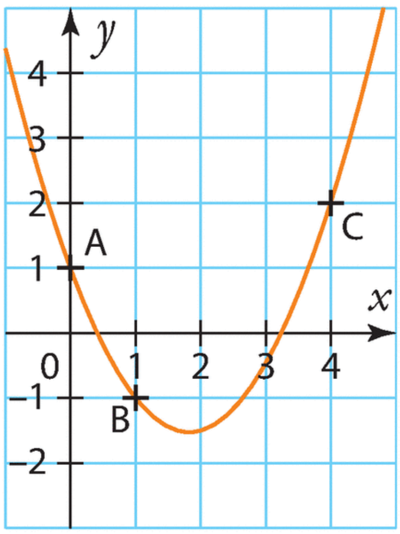
<u>Exercice n°13</u> : Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{2x^2 + 5x + 3}{x^2 + x - 2} > 0$ 2) $(2x-1)^2 > (x+1)^2$

<u>Exercice n°14</u> : Résoudre les équations suivantes :

1) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ 2) $2x^4 - x^2 + 1 = 0$

<u>Exercice n°15</u> : A partir d'une parabole :



Soit f une fonction polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-contre.

1. A l'aide des coordonnées du point A, déterminer la valeur de c.
2. A l'aide des coordonnées des points B et C, déterminer la valeur des coefficients a et b.
3. En déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Exercice n°16 :

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^2 - 4x - 30$.

1. Calculer $P(0)$ et en déduire les coordonnées du point d'intersection de la courbe de P avec l'axe des ordonnées.
2. **a)** Déterminer la forme canonique de $P(x)$.

   b) En déduire le tableau de variations de la fonction P.
3. **a)** Calculer le discriminant Δ de ce trinôme.

   b) En déduire les solutions de l'équation $2x^2 - 4x - 30 = 0$.

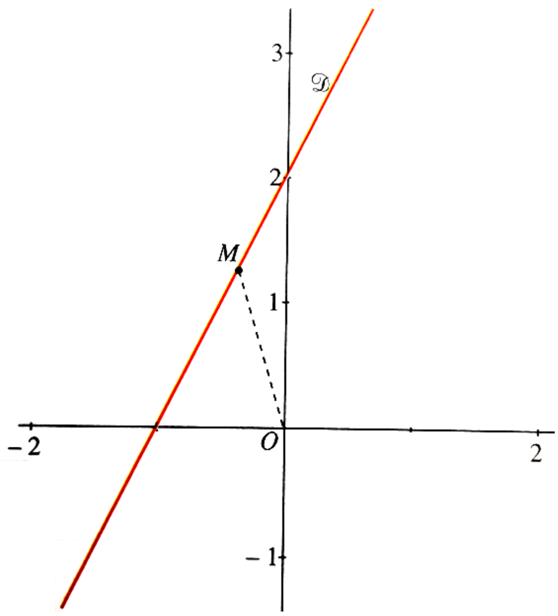
   c) Résoudre l'inéquation $2x^2 - 4x - 30 \geq 0$ (on pensera à dresser le tableau de signe de la fonction P).

Exercice n°17 :

Dans un repère orthonormal du plan d'origine O, on donne la droite $\mathfrak{D}$ d'équation $y = 2x + 2$.

M désigne un point variable de la droite $\mathfrak{D}$, de coordonnées $(x\,;y)$.

On cherche à déterminer s'il existe un point M tel que le carré de la distance OM est minimal et à déterminer alors ses coordonnées.



1. Montrer que $OM^2 = 5x^2 + 8x + 4$.
2. On désigne par f la fonction associant à l'abscisse x du point M le nombre réel OM^2. Calculer les coordonnées du sommet de la courbe de f.
3. En déduire la réponse au problème posé.
4. Montrer qu'il existe deux points M de la droite $\mathfrak{D}$ tels que $OM = \sqrt{8}$ et calculer leur coordonnées.

<u>Exercice n°18</u> : Soit Ω la parabole d'équation : $y = x^2 - 3x - 4$

Pour tout réel m, on appelle D_m la droite d'équation : $y = -mx - 5$

Déterminez les valeurs de m pour lesquelles :

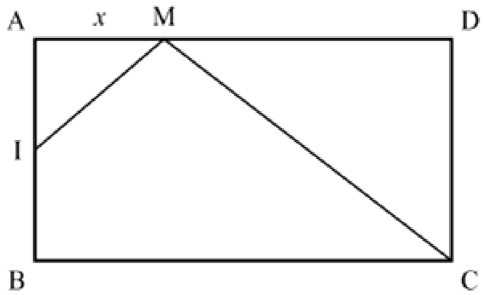
1. D_m coupe Ω en un seul point.
2. D_m coupe Ω en deux points distincts.
3. D_m ne coupe pas Ω

<u>Aide</u> : Pour cela, on montrera que le problème revient à résoudre l'équation :
(E) : $x^2 + (m-3)x + 1 = 0$ *et on calculera* Δ_m.

<u>Exercice n°19</u> :

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB = 1$ et $AD = 2$. I est le milieu de $[AB]$.

Pour tout point M du segment $[AD]$, on pose $AM = x$.



1. Quelles valeurs peuvent prendre x ?
2. On pose $f(x) = MI^2 + MC^2$

   Montrer que $f(x) = 2x^2 - 4x + \frac{21}{4}$
3. On admet que le triangle IMC est rectangle si $f(x) = \frac{17}{4}$.

   Déterminez les valeurs de x pour lesquelles le triangle IMC est rectangle.

<u>Exercice n°20</u> : Equation du troisième degré :

Soit (E) l'équation définie par :

$$x^3 + 5x^2 - 12x + 6 = 0$$

1. Montrer que 1 est solution de (E).
2. Montrer que :

$$x^3 + 5x^2 - 12x + 6 = (x-1)(x^2 + 6x - 6)$$

3. Résoudre alors l'équation (E).

<u>Exercice n°21</u> : Modéliser un problème économique :

Un artisan fabrique des boîtes à bijoux en bois. Il peut en fabriquer jusqu'à 150 par mois. On suppose que toute la production est vendue, et chaque boîte est vendue 50€.

Le coût de fabrication en euros de x boîtes est donné par la fonction :

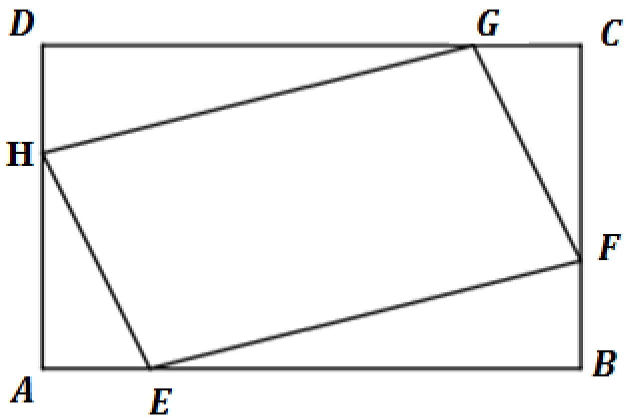
$$f(x) = 0{,}23x^2 + 4x + 300$$

1. Quel est le coût de fabrication de 20 boîtes ?
2. On note $R(x)$ la recette, en euros, engendrée par la vente de x boîtes. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
3. Montrer que le bénéfice, en euros, engendrée par la vente de x boîtes est donné par la fonction B définie sur $[0\,;150]$ par $B(x) = -0{,}23x^2 + 46x - 300$.
4. Quel est le bénéfice réalisé pour la vente de 20 boîtes ?
5. Etudier les variations de B sur $[0\,;150]$.
6. En déduire le bénéfice maximal de l'artisan. Pour combien de boîtes est-il obtenu ?
7. Déterminer, lorsque c'est possible, le nombre de boîtes à produire et vendre pour obtenir un bénéfice de :
   a) 1425 €
   b) 3000€
8. Combien de boîtes l'artisan doit-il fabriquer et vendre pour être rentable ?

<u>Exercice n°22</u> : Optimisation :

On considère un rectangle $ABCD$ et les points E, F, G et H situés respectivement sur les segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ tel que $AE = BF = CG = DH$.

On pose $AB = 10$ et $BC = 2$ et $AE = x$.



1. Montrer que la somme des aires des triangles EBF et GDH est égale à $10x - x^2$.
2. Montrer que la somme des aires des triangles HAE et FCG est égale à $2x - x^2$.
3. On appelle $A(x)$ l'aire de $EFGH$ en fonction de x.

   Montrer que $A(x) = 2x^2 - 12x + 20$. Préciser le domaine de définition de A.
4. Dresser en justifiant, le tableau de variation de la fonction A.
5. Résoudre l'inéquation $A(x) \geq 4$.