

DERIVATION

I. RAPPELS SUR LA DERIVATION

A. Nombre dérivé, fonction dérivée

Définition : Soit f une fonction définie sur I et a un réel appartenant à I .

Le **taux d'accroissement** de f entre a et $a + h$ est la fonction définie par :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Où $h \neq 0$ et $a + h \in I$.

Définition : Si $\tau(h)$ tend vers un unique nombre réel quand h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a .

Ce nombre réel est appelé **nombre dérivé de f en a** . On le note $f'(a)$.

On écrit alors :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque : On peut également définir $f'(a)$, s'il existe, de la manière suivante :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Définition : Dire que f est **dérivable** sur I signifie que f est dérivable en tout réel x de I .

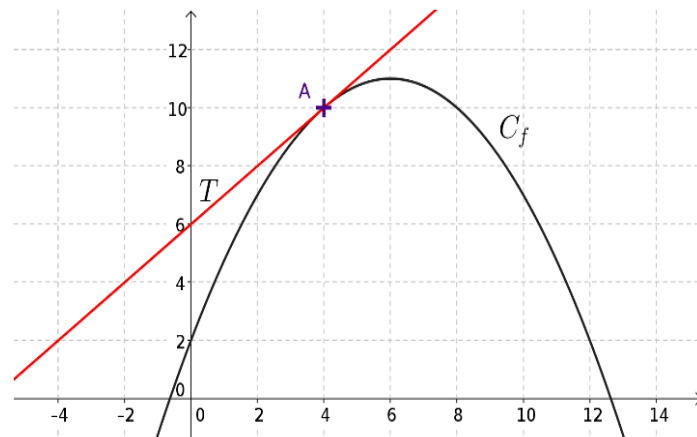
La fonction dérivée de f , notée f' , est la fonction qui, à tout x , associe le nombre $f'(x)$.

B. Tangente à la courbe d'une fonction

Propriété : f est une fonction dérivable en un réel a de I . Dans un repère, la tangente à la courbe représentative C de la fonction f au point d'abscisse a est la droite T qui passe par le point $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de la tangente T est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



C. Signe de la dérivée et sens de variation

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur I .

- i) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$
- ii) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$
- iii) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$

D. Dérivée et extremum local

Propriétés : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c est un nombre réel de I .

- i) Si $f(c)$ est un extremum local de f , alors $f'(c) = 0$
- ii) Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local.

x	c
Signe de $f'(x)$	- 0 +
Variations de f	

x	c
Signe de $f'(x)$	+ 0 -
Variations de f	

E. Opérations et dérivation

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et k un nombre réel,

$(u + v)' = u' + v'$	$(ku)' = k \times u'$	$(uv)' = u'v + v'u$
$(u^2)' = 2uu'$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

II. DERIVEE D'UNE FONCTION COMPOSEE

Définition : Soient u une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction définie sur l'intervalle J . La composée de u par v , notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par :

$$v \circ u(x) = v(u(x))$$

Exemple : Soient u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = x^2 + 1$ et v la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $v(x) = \sqrt{x}$. Alors $v \circ u$ est définie sur \mathbb{R} par $v \circ u(x) = v(u(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Propriétés : Soient u une fonction définie et dérivable sur I à valeurs dans J , et v une fonction définie et dérivable sur J .

Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$ c'est-à-dire que pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$$

Démonstration : Soit x_0 un réel de l'intervalle I . On veut montrer que $v \circ u$ est dérivable en x_0 donc que

$$\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 .

$$\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \times \frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{u(x) - u(x_0)}$$

D'une part, u étant dérivable en x_0 on sait que $\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $u'(x_0)$ quand x tend vers x_0 . D'autre part, lorsque x tend vers x_0 , $u(x)$ tend vers $u(x_0)$ car u est continue en x_0 (puisque'elle est dérivable sur I (résultat admis)). De plus, comme v est dérivable en $u(x_0)$, on a :

$$\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{u(x) - u(x_0)}$$

tend vers $v'(u(x_0)) = v' \circ u(x_0)$. Donc,

$$\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \times \frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{u(x) - u(x_0)}$$

tend vers $u'(x_0) \times (v' \circ u)(x_0)$ pour tout $x \in I$.

Remarque : On peut également ainsi retrouver la formule vue en première : lorsque v est définie et dérivable sur I , la fonction $x \mapsto v(ax + b)$ est dérivable sur I et sa dérivée $x \mapsto v'(ax + b)$.

Propriétés : Conséquences :

Soit u une fonction définie et dérivable sur I ,

i) $(e^u)' = u'e^u$

ii) Pour tout entier naturel n non nul, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

iii) Si $u > 0$ sur I , $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exemples :

i) $f(x) = e^{x^2}$, on a $f'(x) = 2xe^{x^2}$

ii) $g(x) = (2x + 5)^3$, on a $g'(x) = 3 \times 2 \times (2x + 5)^2$