

FICHE D'EXERCICES

Dérivation

Exercice n°1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Montrer que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$.
2. Montrer que f est dérivable en -1 et calculer $f'(-1)$.

Exercice n°2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{3}{x}$

Montrer que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

Exercice n°3 : Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quel ensemble elle est dérivable, puis calculer sa fonction dérivée :

a) $f(x) = \frac{5}{2x} + \frac{3}{4} - \frac{7x^2}{4}$

d) $j(x) = \frac{-5}{3x^2 + 2}$

b) $g(x) = \frac{-4}{5x}(x - 11)$

e) $k(x) = \frac{9x}{x^2 - 6x + 5}$

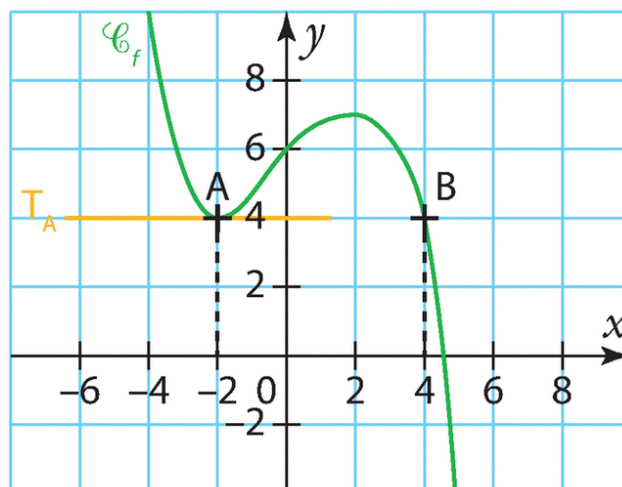
c) $h(x) = \frac{5x^2 - 8x + 1}{21 - 7x}$

f) $m(x) = \sqrt{10 - x}$

Exercice n°4 :

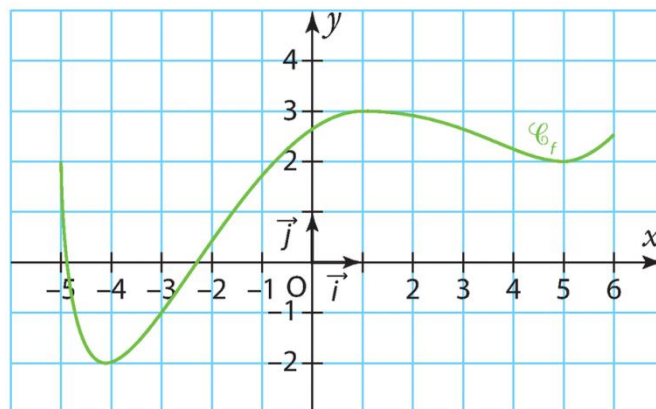
1. C_f est la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ et T est la tangente C_f au point d'abscisse $a = -2$. Déterminer l'équation de T .
2. C_g est la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5x$ et T est la tangente C_g au point d'abscisse $a = 3$. Déterminer l'équation de T .

Exercice n°5 : Soit C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. T_A est la tangente à C_f au point d'abscisse -2 . On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(4) = -4$.



1. Déterminer $f'(-2)$ et donner l'équation de la tangente T_A .
2. B est le point de la courbe d'abscisse 4. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point B .

Exercice n°6 : Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 6]$. La courbe représentative de f est tracée ci-dessous dans un repère du plan.



1. Décrire les variations de f sur $[-5; 6]$.
2. En déduire le tableau de signes de la fonction dérivée f' sur $[-5; 6]$.

Exercice n°7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{9\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 9}$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{9\}$ et déterminer sa dérivée f' .
2. Etudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de f .

Exercice n°8 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n + 3}{n + 1}$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x + 3}{x + 1}$$

- a) Calculer la dérivée f' de la fonction f .
 - b) En déduire le sens de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer alors le sens de variations de la suite (u_n) .

Exercice n°9 : Une entreprise fabrique et vend des montres. Elle en produit chaque jour entre 2 et 24. On note x le nombre de montres produites et vendues par jour. On appelle $C(x)$ le coût total journalier de fabrication en euros.

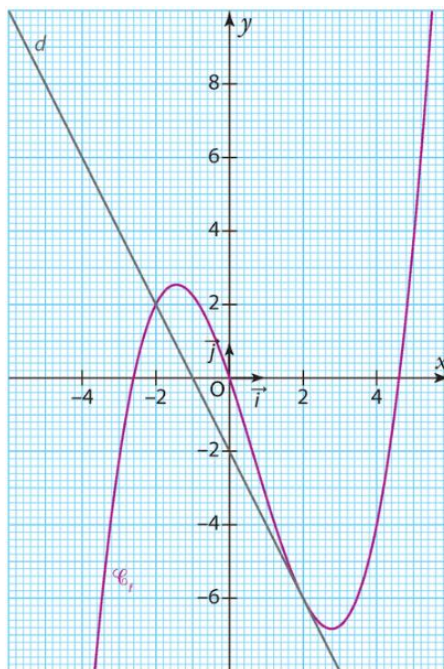
La fonction C est définie par $C(x) = x^2 - 4x + 169$. On appelle coût unitaire moyen $C_m(x)$ le coût de fabrication d'une montre lorsqu'on en produit x . Il est donné par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1. A quel intervalle I appartient le nombre x ?
2. Démontrer que la fonction C_m est définie sur I par :

$$C_m(x) = x - 4 + \frac{169}{x}$$

3. Justifier que C_m est dérivable sur I et déterminer, pour tout réel x de I , $C'_m(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de $C'_m(x)$ sur I .
5. En déduire le nombre de montres que l'entreprise doit fabriquer pour avoir un coût moyen minimal.

Exercice n°10 : Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ci-dessous sont tracées la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$ et la droite d d'équation $y = -2x - 2$.



1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. Démontrer que la droite (d) est tangente à C_f au point d'abscisse 2.
3. Existe-t-il une autre tangente à C_f parallèle à d ? Justifier.
4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (-2x - 2)$.
 - a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
 - b) Vérifier que -2 et 2 sont solutions de l'équation $g(x) = 0$.
 - c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$
5. A l'aide de la question précédente, étudier la position relative de C_f et d .

Exercice n°11 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f .
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

Exercice n°12 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (-x + 3)^4$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f .
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

Exercice n°13 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f .
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

Exercice n°14 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes en précisant leur domaine de dérivabilité :

1. $f(x) = e^{-(x+2)}$
2. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
3. $h(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$
4. $p(x) = e^{-x}$
5. $h(x) = \cos(4x)$
6. $q(x) = (4e^{-x} + 1)^3$

Exercice n°15: Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la fonction dérivée n -ième de la fonction f .
Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2. En déduire une relation entre $f^{(4)}(x)$ et $f(x)$.
3. Dans ces conditions, que vaut $f^{(1789)}(x)$?

Exercice n°16 : Courbe de Lorenz

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie et croissante sur $[0; 1]$.
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$.
- $\forall x \in [0; 1], L(x) \leq x$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1$$

- a) Déterminer la dérivée de f notée f' .
- b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0,1]$.
- c) En déduire que $x \geq f(x)$ sur $[0; 1]$.
- d) Conclure.

2. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$g(x) = e^x - (e - 2)x - 1$$

- a) Calculer $g'(x)$. Donner le sens de variations de g sur $[0; 1]$.
- b) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
- c) On pose $h(x) = x - g(x)$.

x	0	$\ln(e - 1)$	1
Signe de $h'(x)$	+	0	-

Déduire du tableau de signes de $h'(x)$ le tableau de variations de h (on précisera l'arrondi à 0,1 de $h(\ln(e - 1))$ puis que, pour tout x de $[0,1]$, $g(x) \leq x$).

3. En déduire que les courbes de représentatives de f et de g sont toutes deux des courbes de Lorenz.

Exercice n°17 : Composition avec l'opposé

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle réel I . On pose, pour tout réel $x \in I$,

$$g(x) = f(-x)$$

1. Calculer $g'(x)$.
2. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.
3. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.
4. Montrer que si f' est impaire alors f est paire.
5. Montrer que si f' est paire et $f(0) = 0$, alors f est impaire.

Exercice n°18 : Etudier une fonction composée :

Soit m un paramètre réel non nul.

On considère la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = (mx + 1)e^{\frac{1}{mx+1}}$$

On appellera C_m sa courbe représentative dans le plan P , rapporté à un repère orthonormé.

Répondre aux questions suivantes selon m .

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f_m est définie.
2. Déterminer les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer les variations de la fonction. Préciser les coordonnées des extrema si la fonction en possède.
4. Construire le tableau de variations de la fonction.

Exercice n°19 : Dérivée n -ième d'une fonction :

Soit f la fonction inverse définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Soit k un entier naturel. On considère la dérivée k -ième de f notée $f^{(k)}(x)$.

Ainsi, $f^{(1)}(x) = f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3}$

1. Calculer $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer une formule de $f^{(k)}(x)$.
3. Démontrer cette formule par récurrence sur $k \geq 1$.
4. Démontrer par récurrence sur $k \geq 1$ que, pour

$$f(x) = \frac{1}{a+x} : f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(a+x)^{k+1}}$$