DEVOIR MAISON DE MATHEMATIQUES N°1

Rappels sur les suites numériques

Exercice n°1 : Suites arithmético-géométriques :

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres. Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale. On observe un bambou de taille initiale 1 mètre. Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou, n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$. Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance de bambou entre deux jours consécutifs se traduit, pour tout entier naturel, par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}05(20 - u_n)$$

1. Vérifier que $u_1 = 1{,}95$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 1$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 20$. Etudier le sens de variations de (u_n).
4. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$.
   - **a)** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial v_0.
   - **b)** En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.

Exercice n°2 :

Au 1er Janvier 2019, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 12$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 12$.
2. **a)** Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 48$.

   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 48$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de 0,75 dont précisera le premier terme.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 852 \times 0{,}75^n + 48$.

Exercice n°3 :

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$$

1. Etudier les variations sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{x}{x+8}$$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Etudier les variations de la suite (u_n).
4. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n,
$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}$$
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.